ＭＢ　関数解析学　線形作用素の理論　講義報告[3]

２００８年6月7日（土）　１４：００−１６：００

Banach空間 の例としてm回連続微分可能な関数全体の空間を扱った。次に線形作用素の有界性を定義し、線形作用素の連続性と有界性が同値であることを示した。

練習問題 1.3.

1. $C^1([a,b]) = \left\{ f \in C([a,b]) \mid f^{(1)} \in C([a,b]) \right\}$ とおいたとき、$C^1([a,b])$ 上のノルム関数を

$$\|f\|_1 = \|f\|_{[a,b]} + \left\| f^{(1)} \right\|_{[a,b]}$$

とすると、このノルムについて $C^1(a,b)$ は *Banach*空間 になることを示せ。

2. $C^m([a,b]) = \left\{ f \in C([a,b]) \mid f^{(\nu)} \in C([a,b]),\ \nu = 1,2,\cdots,m \right\}$ とおいたとき、$C^m([a,b])$ 上のノルム関数を

$$\|f\|_m = \sum_{\nu=0}^{m} \left\| f^{(\nu)} \right\|_{[a,b]}$$

とすると、このノルムについて $C^m(a,b)$ は *Banach*空間 になることを示せ。

3. $C^2([a,b]) = \left\{ f \in C([a,b]) \mid f^{(\nu)} \in C([a,b]),\ \nu = 1,2 \right\}$ とおいたとき、$C^2([a,b])$ 上のノルム関数を

$$\eta(f) = \|f\|_{[a,b]} + \left\| f^{(2)} \right\|_{[a,b]}$$

とすると、このノルムについて $C^2(a,b)$ は *Banach*空間 になるか調べよ。

1.2　有界線形作用素のクラス

定義 1.3. E, F をノルム空間、T を E から F への作用素とする。$D(T)$ を T の定義域、$R(T) = T(D(T))$ を T の値域とするとき、T が $v \in D(T)$ で**連続**であるとは、位相空間 $D(T)$ から F への写像として、v で連続であることである。また、T が**連続**であるとは、ノルム空間 $D(T)$ から F への写像として連続になることである。

練習問題 1.4. ノルム空間 E からノルム空間 F への作用素 T が $v \in D(T)$ で連続になるための必要十分条件は、点列 $\varphi : \mathbb{N} \to D(T)$ が v に収束するならば、$\lim_{\nu\to\infty} T(\varphi(\nu)) = T(v)$ となることである。

定義 1.4 (有界性). ノルム空間 $(E, \|\|_E)$ からノルム空間 $(F, \|\|_F)$ への作用素 T が**有界**であるとは、$M > 0$ なる M が存在して、

$$\|T(v)\|_F \leq M \|v\|_E \quad \mathit{for}\ \forall v \in D(T)$$

を満たすことである。

練習問題 1.5. ノルム空間 E からノルム空間 F への線形作用素 T が連続であることと、次の条件は同値である。

[3]数学工房　http://www.sugakukobo.com/

1. T は原点 0_E で連続。

2. T は有界。

記録　by　J.S